



SOBRE A INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS EM GEOMETRIA

Jaime Velasco

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

jaimevelasco@ime.uerj.br

Sueli Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

sueli.cunha@ime.uerj.br

Resumo: A utilização de fórmulas no ensino da Matemática é de grande importância para a compreensão de determinadas propriedades. De modo geral, elas constituem expressões algébricas que descrevem de que modo certos objetos matemáticos (como grandezas, por exemplo) estão correlacionados. Entretanto, é muito comum encontrar, na literatura, fórmulas não devidamente interpretadas, cujo intuito é meramente calcular algum dos objetos (relacionados por elas), em termos dos outros objetos (geralmente dados). Sendo assim, este texto se destina a apresentar alguns exemplos desse tipo de situação, tratando de dois assuntos usualmente abordados no 9º Ano do Ensino Fundamental (a saber, o comprimento do arco de uma circunferência e as relações métricas num triângulo retângulo), buscando identificar tanto as relações entre objetos descritas por determinadas fórmulas quanto possíveis fórmulas equivalentes às dadas, e que possuem interpretações descrevendo relações mais interessantes do ponto de vista didático. Além disso, é feita uma breve análise de livros didáticos, com o intuito de verificar como os autores tratam os significados das fórmulas.

Palavras-chave: Leitura; Interpretação; Geometria; Fórmulas.

1 Introdução

Uma parcela significativa dos alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental se interessa pela Matemática, mas tal interesse se reduz com o passar dos anos. É possível que uma das causas desse desânimo pela disciplina seja devido à forma inadequada com a qual o assunto é tratado nessa fase (como nos conceitos relacionados a frações, por exemplo). Além disso, a introdução da Álgebra no 7º Ano do Ensino Fundamental também pode ser um agravante, pois requer uma maior abstração para a compreensão dos conceitos (necessitando, portanto, de uma base matemática mais sólida). Em muitos casos, a introdução ao pensamento algébrico também não é feita de modo adequado, ocasionando falta de compreensão dos conceitos de Álgebra. Consequentemente, as fórmulas matemáticas são frequentemente vistas pelos alunos como meras *expressões utilizadas para*



se fazer cálculos, sendo utilizadas de forma mecânica, e não se atentando para seus verdadeiros significados. Vale observar que *fórmulas matemáticas* representam uma maneira de se escrever em *linguagem matemática* as relações existentes entre determinados objetos.

Em Geometria, em particular, as fórmulas matemáticas são vistas com frequência, como na relação entre regiões planas e suas áreas, bem como no estudo dos polígonos (ao relacioná-los com o número de suas diagonais, por exemplo). Sendo assim, interpretar adequadamente essas relações (por meio das fórmulas) assim como as expressões matemáticas como um todo, identificando seu significado geométrico no referido contexto, é essencial para a compreensão do conteúdo tratado.

Nesse sentido, este texto se propõe a analisar algumas conhecidas fórmulas, usualmente apresentadas no 9º Ano do Ensino Fundamental, ao se tratar do comprimento de um arco de circunferência e das relações métricas num triângulo retângulo, visando identificar significados mais interessantes (do que os usualmente apresentados nos materiais didáticos). Para isso, em alguns casos, é necessário alterar um pouco a fórmula já conhecida, obtendo assim uma equivalente a ela, mas que possua um sentido mais relevante.

Com o intuito de comparar as sugestões de interpretações sugeridas neste texto com as usualmente feitas, é realizada ainda uma breve análise de materiais didáticos, alguns deles adotados como livro-texto pelo 9º Ano do Ensino Fundamental em certas escolas.

2 Interpretações de algumas fórmulas

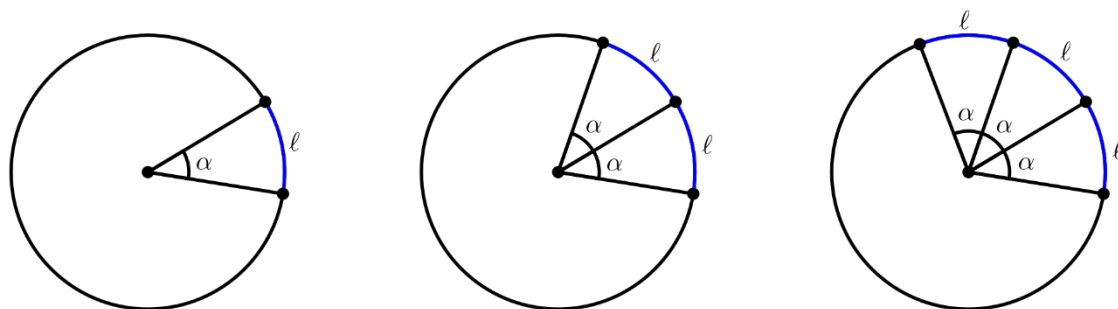
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere que a noção do comprimento do arco de uma circunferência (dados seu raio e seu ângulo central) seja estudada no 9º Ano do Ensino Fundamental, orientando, como um dos objetos de conhecimento nessa etapa, o estabelecimento de relações entre arcos e ângulos na circunferência, associando à habilidade EF09MA11 (Brasil, 2018, p. 317).

Dados uma circunferência de centro em um ponto O e raio r , e um arco de extremos em dois pontos distintos A e B nessa circunferência, o ângulo $\angle AOB$ é denominado o *ângulo central* do referido arco. O comprimento de um arco corresponde a uma parte (a uma fração) do comprimento da circunferência, e é diretamente proporcional a seu ângulo central (em



outros termos, duplicando-se o ângulo central, o comprimento do arco correspondente é duplicado; triplicando-se o ângulo central, o comprimento do arco correspondente também é triplicado, etc., como ilustrado na Figura 1).

Figura 1: Proporcionalidade entre comprimento de arco e seu ângulo central



Fonte: Os autores

Isso indica que a razão entre o comprimento ℓ de um arco e a medida α (em graus) do ângulo central correspondente (expressa como $\frac{\ell}{\alpha}$) é constante. Em particular, como a circunferência de raio r (que possui portanto comprimento $2\pi r$) pode ser vista como um arco de ângulo central 360° , tem-se

$$\frac{\ell}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360}. \quad (1)$$

Nota-se que a Expressão (1) é equivalente a $\ell = \frac{2\pi r \alpha}{360}$ e, simplificando, obtém-se que o comprimento ℓ de um arco de circunferência pode ser escrito, em termos de seu raio r e de seu ângulo central α , da seguinte forma:

$$\ell = \frac{\pi r \alpha}{180}. \quad (2)$$

A Expressão (2) pode ser encontrada em alguns materiais didáticos, como em Dolce e Pompeo (2013) e Santos (2025). Entretanto, tal expressão não possui uma interpretação matemática clara, podendo não refletir significado para o aluno, dificultando assim seu aprendizado. Porém, a Expressão (1) é ainda equivalente a

$$\ell = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r, \quad (3)$$

que expressa uma outra relação entre o comprimento de um arco e a correspondente circunferência, a saber, *o comprimento de um arco de circunferência é uma fração do comprimento da própria circunferência, fração esta correspondente ao ângulo central,*



tomado em relação ao ângulo completo (de medida 360°). Nota-se que esta relação corresponde a uma interpretação muito mais significativa, visto que ela remete ao fato de que o comprimento de um arco corresponde a uma parte (a uma fração) do comprimento da própria circunferência, como dito anteriormente. Felizmente, alguns materiais didáticos atuais (como Muniz Neto (2013) e Iezzi, Dolce e Machado (2022)) vêm destacando a Expressão (3) como a fórmula de cálculo do comprimento de um arco.

É bem verdade que, *para fins de cálculo*, a Expressão (2) é mais simples de ser utilizada (visto que já está devidamente simplificada, facilitando assim as contas que devem ser realizadas). No entanto, as fórmulas não devem ser vistas simplesmente como *expressões a serem utilizadas para se calcular algo*; elas possuem sentido próprio, estabelecendo (como dito anteriormente) uma relação entre os objetos envolvidos, refletindo portanto significado matemático relevante.

É importante destacar que Iezzi, Dolce e Machado (2022, p. 233) apresentam primeiro a Expressão (3), e, logo após, concluem: “Sendo α a medida angular (em graus) de um ângulo, a medida do comprimento do arco é a fração $\frac{\alpha}{360}$ da medida do comprimento da circunferência que o contém”; esta é uma excelente interpretação. Em seguida, os autores apresentam a Expressão (2), como equivalente à (3), possivelmente para fins de cálculo, e não a interpretam.

Bianchini (2022), por sua vez, estabelece, como expressão de cálculo do comprimento de arco, a proporção

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha},$$

que, por ser equivalente à Expressão (1), reflete a proporcionalidade existente entre o comprimento de arco e o ângulo central, configurando portanto uma fórmula que agrega significado ao assunto estudado.

Discussão semelhante pode ser realizada em relação à área s de um setor circular, que também é proporcional ao ângulo central α , sendo consequentemente uma parte (uma fração) da área do círculo. Nesse caso, uma expressão interessante, análoga a (3), é

$$s = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2,$$

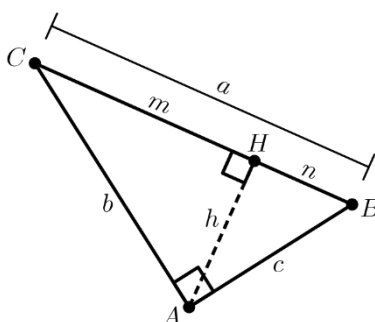


onde r indica o raio do referido setor, e que pode ser interpretada como *a área de um setor circular é uma fração da área do próprio círculo, fração esta correspondente ao ângulo central tomado em relação ao ângulo completo (de medida 360°)*.

Outro objeto de conhecimento que a BNCC sugere ser tratado no 9º Ano do Ensino Fundamental são as relações métricas num triângulo retângulo, que descrevem relações entre as medidas dos catetos, da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa, associando às habilidades EF09MA13 e EF09MA14 (Brasil, 2018, p. 318).

Sejam ABC um triângulo retângulo em A , com hipotenusa BC medindo a , catetos AB e CA medindo c e b , respectivamente, e altura AH , relativa à hipotenusa, medindo h . O segmento BH (respectivamente, CH), cuja medida é representada por n (respectivamente, m) é denominado *a projeção ortogonal do cateto AB (respectivamente, CA) sobre a hipotenusa* (Figura 2).

Figura 2: Um triângulo retângulo



Fonte: Os autores

As relações supracitadas são descritas a seguir e podem ser expressas (como em Bianchini (2022), Dolce e Pompeo (2013), Muniz Neto (2013) e Silva (2025)), baseando-se no conceito de semelhança de triângulos, tomando como base as representações indicadas e ilustradas na Figura 2. Essas relações são:

- 1) $b^2 = am$, $c^2 = an$;
- 2) $h^2 = mn$;
- 3) $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras);
- 4) $bc = ah$.

Alguns autores, como Silveira (2022) e Bianchini (2022), interpretam as expressões em 1) como *o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção*.



De modo análogo, os mesmos autores interpretam a expressão em 2) como *o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos*. Embora estas não sejam interpretações inadequadas, é possível estabelecer equações equivalentes às dadas em 1) e 2), de modo a descrever relações com ainda mais significado matemático para cada uma delas. Para isso, basta escrever, de forma equivalente, cada uma delas, respectivamente, como:

$$1') b = \sqrt{am}, c = \sqrt{an};$$

$$2') h = \sqrt{mn}.$$

Como a raiz quadrada do produto de dois números reais positivos pode ser vista como a média geométrica (ou média proporcional) de tais números, as expressões em 1') podem ser interpretadas como *cada cateto de um triângulo retângulo pode ser obtido como a média geométrica (ou média proporcional) da hipotenusa e de sua projeção sobre ela*, descrevendo assim, uma outra relação entre as medidas dos catetos, da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa. De modo análogo, a expressão em 2') pode ser vista como *a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa pode ser obtida como a média geométrica (ou média proporcional) das projeções dos catetos sobre ela*. Essas leituras são interessantes, visto que poucas são as aplicações apresentadas no ensino básico da média geométrica de dois números reais positivos, e são de extrema importância no estudo das construções geométricas com régua e compasso.

É interessante observar que algumas obras (como Iezzi, Dolce e Machado (2022) e Dolce e Pompeo (2013)) apresentam interpretações para as próprias expressões em 1) e 2) utilizando média geométrica (ou média proporcional, lendo-as, portanto, de modo semelhante às leituras de 1') e em 2'), no parágrafo anterior, mas sem escrever estas últimas explicitamente). Embora seja louvável o interesse dos autores na busca de uma leitura mais significativa, é importante notar que as expressões 1) e 2) não descrevem explicitamente uma média geométrica, como em 1') e em 2').

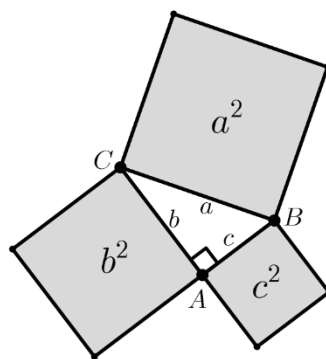
Com respeito ao Teorema de Pitágoras, expressão em 3), atualmente é comum considerá-lo uma relação métrica no triângulo retângulo, no sentido de relacionar algumas das medidas (catetos e hipotenusa) presentes nesse tipo de triângulo, e é habitual vê-lo como *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*. Iezzi, Dolce e Machado (2022) e Silveira (2022) são exemplos de autores que interpretam dessa forma. Entretanto,



como o quadrado da hipotenusa constitui precisamente a área do quadrado construído sobre ela (de modo análogo com respeito aos catetos), uma leitura mais interessante do Teorema de Pitágoras é a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (Figura 3). Esta leitura acrescenta mais um conceito matemático à interpretação, a saber, a noção de área de quadrado. Alguns autores citam essa correspondência entre o Teorema de Pitágoras e a área de quadrados, tais como Silveira (2022) e Bianchini (2022).

Essa é, inclusive, a ideia presente em Os Elementos, de Euclides, onde se lê: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (Euclides, 2009).

Figura 3: Teorema de Pitágoras (área)



Fonte: Os autores

A expressão em 4), por sua vez, frequentemente utilizada para se determinar a altura relativa à hipotenusa conhecendo-se os catetos e a hipotenusa, é comumente lida como *o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela*. Silveira (2022), Bianchini (2022) e Iezzi, Dolce e Machado (2022) realizam esse tipo de leitura. No entanto, a expressão

$$\frac{bc}{2} = \frac{ah}{2},$$

equivalente à expressão em 4), descreve que *o valor da área do triângulo retângulo pode ser obtido tanto utilizando um dos catetos como sua base quanto a hipotenusa como sua base*. Embora este fato possa parecer óbvio, pois a área de um triângulo qualquer sempre independe do lado que se toma como base, ela não é tão simples de se verificar no ensino básico, visto que decorre do fato de que todo triângulo pode ser obtido como a metade de



um paralelogramo e a própria área do paralelogramo independe da base tomada. Dentre as obras consultadas para se redigir este texto, nenhum autor realiza esse tipo de interpretação.

3 Considerações Finais

Ao analisar alguns materiais didáticos, muitos deles adotados pelo 9º Ano do Ensino Fundamental, é possível perceber que parte deles se dedica à interpretação das fórmulas matemáticas, e reconhecendo nelas relações entre determinados objetos, dando inclusive certo destaque a ela. Em contrapartida, muitos outros (e não citados neste trabalho) não realizam qualquer leitura (mesmo que inadequada) para essas expressões, demonstrando não se interessarem por esse tipo de abordagem do conteúdo; isto é, desconsiderando que *fórmulas matemáticas* não são apenas “ferramentas de cálculos”, mas principalmente uma forma de *descrever* em *linguagem matemática* relações entre objetos matemáticos. Esta atitude pode ser muito prejudicial para a compreensão do aluno, visto que não é feita a devida conexão entre a expressão algébrica (dada pela fórmula) e seu significado matemático.

É importante notar ainda que as discussões realizadas neste texto se referem exclusivamente a comprimento de arco de circunferência e a relações métricas num triângulo retângulo, dois dos assuntos de Geometria abordados no 9º Ano do Ensino Fundamental. Entretanto, o mesmo tipo de análise aqui realizada (a saber, compreender o significado de uma expressão matemática) pode ser feita em assuntos relativos aos demais anos do ensino básico, e discussões interessantes podem ser realizadas mesmo fora da Geometria (como em Álgebra, por exemplo).

Sendo assim, sempre que possível, os docentes da área devem se preocupar com o significado das relações entre objetos (descritas pelas fórmulas) fazendo leituras mais adequadas (ditas *leituras interpretadas*), visando, portanto, um aprendizado mais significativo por parte dos alunos.

4 Referências

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática – Bianchini**. 9º Ano. 10ª ed. São Paulo: Moderna, 2022. Disponível em <<https://pnld.moderna.com.br/wp-content/uploads/2023/05/EDIT-Mat-Bianchini-Matematica-9-ano.pdf>>. Acesso em junho de 2025.



BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em junho de 2025.

DOLCE, Oswaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. Vol. 9. 9ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

EUCLIDES. **Os Elementos**: Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

IEZZI, Gelson.; DOLCE, Oswaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. 9º Ano. 10ª ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2022. Disponível em https://storage.googleapis.com/edocente-content-production/PNLD/PNLD_2024_OBJETO_1/Saraiva/Matematica/index_matematica_9ano_MP.pdf. Acesso em junho de 2025.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**. Vol 2. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SANTOS, Valdex. **Comprimento de um arco**. Matemática IFBA. Disponível em <https://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio-2/trigonometria/comprimento-de-um-arco/>. Acesso em junho de 2025.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que são relações métricas no triângulo retângulo?. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.htm>. Acesso em junho de 2025.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios da Matemática com Ênio Silveira**. 9º ano. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2022. Disponível em <https://pnld.moderna.com.br/wp-content/uploads/2023/05/EDIT-Desafios-da-matematica-Matematica-9-ano.pdf>. Acesso em junho de 2025.